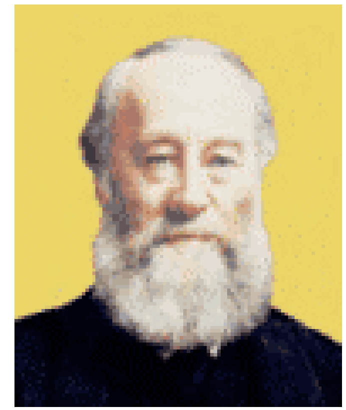
1ªAula do Cap. 07
Energia Cinética e Trabalho

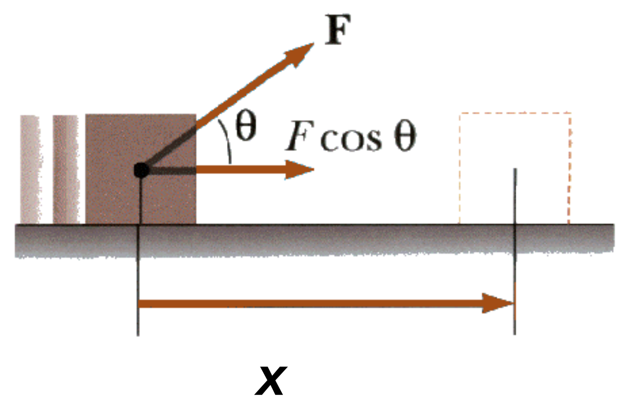


James Prescott Joule
(1818 - 1889)

- **Introdução**
- **Trabalho Mecânico e Produto Escalar**
- **Energia Cinética**
- **Teorema do Trabalho-Energia Cinética**
- **Trabalho Realizado por força variável (Integral)**

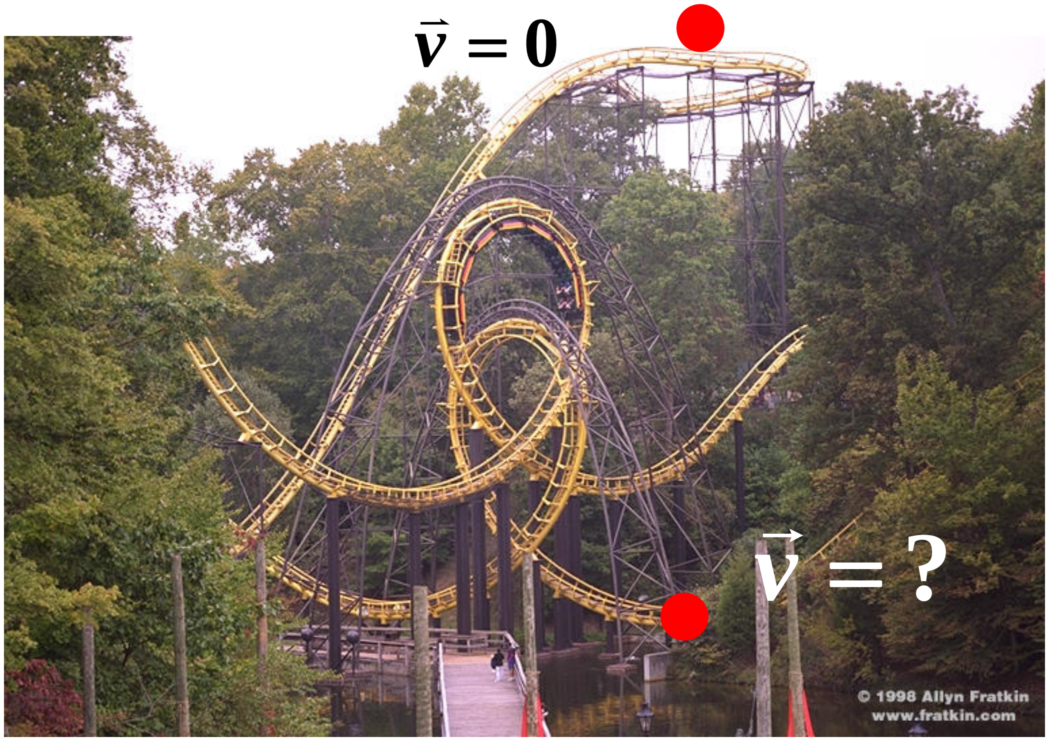
Referência:

- **Halliday**, David; Resnick, Robert & Walker, Jearl. Fundamentos de Física, Vol 1. Cap. 07 da 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC.



Energia

As leis de Newton permitem analisar vários movimentos. Essa análise pode ser bastante complexa, necessitando de detalhes do movimento simplesmente inacessíveis. Exemplo: qual é a velocidade final de um carrinho na chegada de um percurso de montanha russa? Despreze a resistência do ar e o atrito, mas resolva o problema usando as leis de Newton.



Energia

Aos poucos cientistas e engenheiros desenvolveram uma técnica muitas vezes mais poderosa para analisar o movimento. Essa maneira acabou sendo estendida a outras situações , tais como: reações químicas, processos geológicos e funções biológicas.

Essa técnica alternativa envolve o conceito de energia, que aparece em várias formas e tipos.

Energia: ***grandeza escalar associada a um estado de um ou mais corpos.***

Essa definição é muito vaga e para chegar a algum lugar vamos nos concentrar inicialmente em uma forma apenas de energia.

Energia Cinética

Relação entre forças agindo sobre um corpo e a energia cinética:

1) A abordagem a partir do conceito de energia representa um bom atalho para resolução de problemas,

2) A idéia de energia revelar-se-á de fato **fundamental** na Física.

Problema 1D: corpo sob ação de uma força resultante constante:

$$a = \frac{\sum F}{m} \quad \Rightarrow \quad v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x = 2\frac{\sum F}{m}\Delta x$$

$$\sum F \Delta x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Se um objeto está sujeito a uma força resultante constante, esta está relacionada com a variação de velocidade.

Energia cinética

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

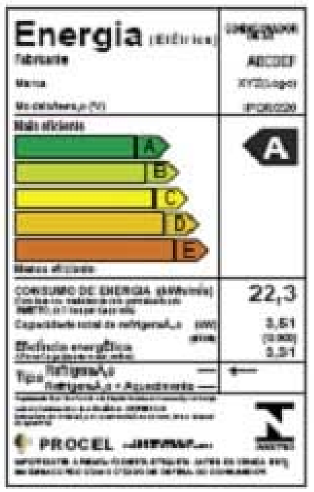
A energia cinética não pode assumir **valores negativos e é uma grandeza escalar.**

O trabalho também é uma grandeza escalar e pode assumir valores negativos…

$$\Delta K = k_f - k_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Unidades:

Unidade	Símbolo	Equivalência
joule	J	= 1 N.m = 1 kg.m^2.s-2
erg (cgs)	erg	= 10-7 J
rydberg	Ry	~ 2,179 87 x 10-18 J
eletron-volt	eV	~ 1,602 18 x 10-19 J
caloria termoquímica	calth	= 4,184 J
caloria internacional	calIT	= 4,1868 J
caloria a 15 oC	calIT	~ 4,1855 J
atmosfera-litro	atm-l	= 101,325 J
British Thermal Unit	Btu	= 1055,06 J



Em Waco, Texas, EUA, em 1896, William Crush, da ferrovia "Katy", estacionou duas locomotivas em extremidades opostas de uma linha férrea de 6,4 km de comprimento, colocou as caldeiras em funcionamento, prendeu as alavancas de aceleração na posição máxima e depois

deixou que elas se chocassem de frente com a velocidade máxima (F
7.1) diante de 30.000 espectadores. Centenas de pessoas ficaram f
das por estilhaços das locomotivas, e muitas delas morreram. Supor
que cada locomotiva pesasse $1{,}2 \times 10^6$ N e que a sua aceleração ao lo
dos trilhos fosse constante igual a $0{,}26$ m/s^2, qual era a energia ciné
total das duas locomotivas imediatamente antes da colisão?

Solução Para calcular a energia cinética de uma das locomotivas, é preciso conhecer a sua massa e a sua velocidade no momento da colisão. Para determinar a velocidade, usamos a Eq. 2-14:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

que, com $v_0 = 0$ e $x - x = 3{,}2 \times 10^3$ m (metade da separação inicial) nos dá:

$$v^2 = 0 + 2(0{,}26\ \text{m/s}^2)(3{,}2 \times 10^3\ \text{m}),$$

ou

$$v = 40{,}8\ \text{m/s},$$

(cerca de 150 km/h). Para calcular a massa das locomotivas, dividimos o peso por g:

$$m = \frac{1{,}2\times10^6\ \text{N}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 1{,}22\times10^5\ \text{kg}.$$

A energia cinética total antes da colisão

$$K = 2\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right) = (1{,}22 \times 10^5\ \text{kg})(40{,}8\ \text{m/s})^2$$

$$K = 2{,}0.10^8\ \text{J}$$

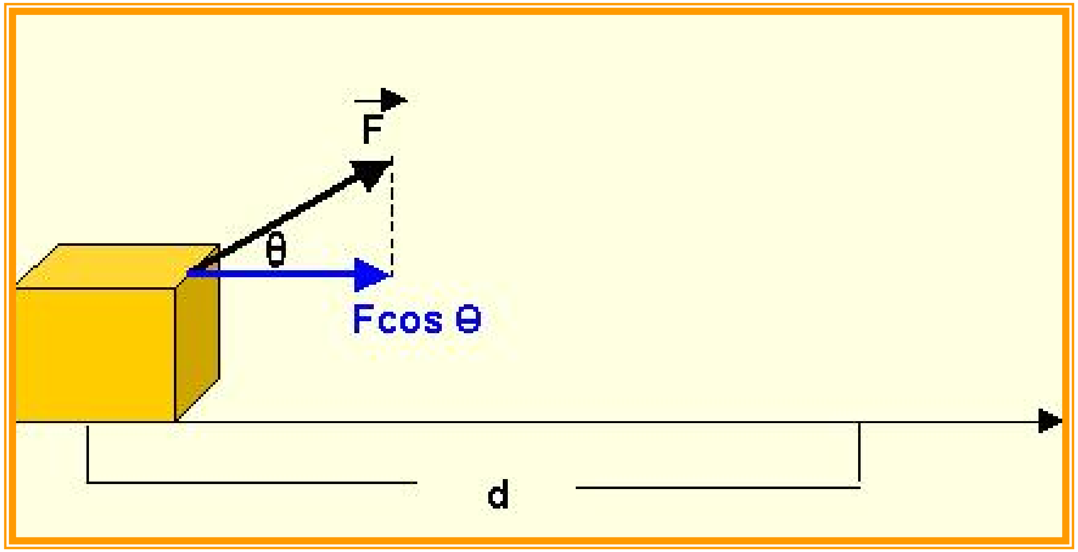
Esta energia é da mesma ordem que a produzida pela explosão de cerca de 50 kg de TNT. Não admira que os espectadores mais próximos tenham sido feridos ou mortos pelos destroços.

Trabalho mecânico & produto escalar:

Trabalho: "É o produto da força ou componente da força na direção do deslocamento, pelo deslocamento".

Expressão: $W = |F| . |d| \cos\theta$

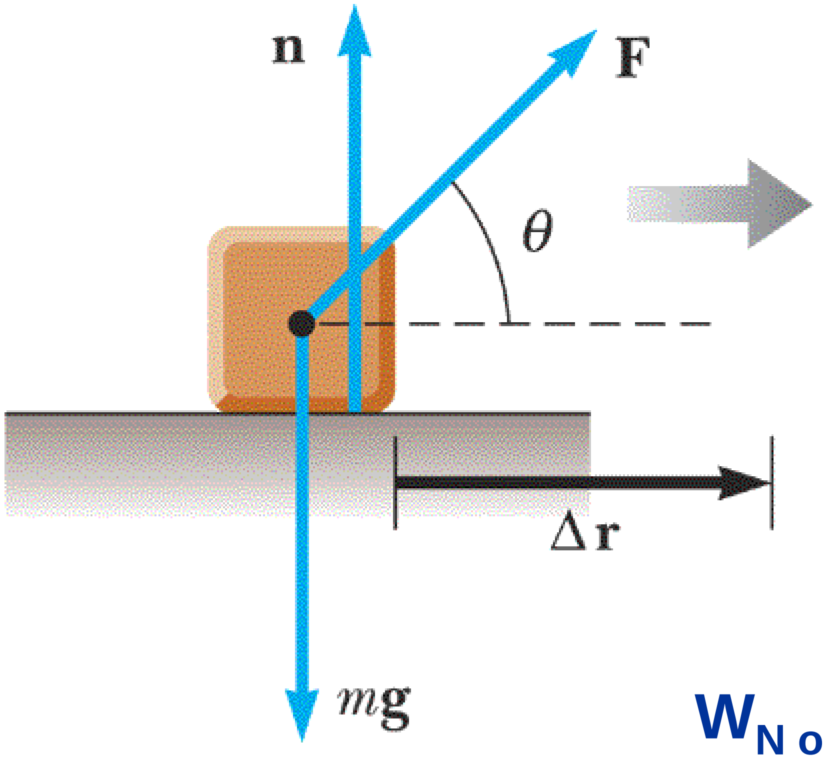
Observe que o trabalho é uma grandeza escalar porque é decorrente do produto escalar de duas grandezas vetoriais **F** e **d.**



$$W = F.d \cos\theta$$

W + ou -

Trabalho mecânico & produto escalar:



$$W = F.d\cos\theta$$

$$W_{N\ ou}\ W_P = F.d\cos 90^o = 0$$

Quando um corpo é deslocado horizontalmente sobre uma mesa plana, a força normal **n** e a força peso **mg** não realizam trabalho, **θ = 90º**.

Trabalho Mecânico

Instalação de uma escultura de Henry Moore

Trabalho realizado pelo guindaste ao erguer a escultura:

$$m = 2000kg$$

$$W = 2000 \times g \times 1{,}5J$$

$$W \approx 3{,}0 \times 10^4 J$$

Para manter a escultura erguida o guindaste não realiza trabalho

Trabalho Mecânico

Exemplo:

Para empurrar um caixote de 25,0 kg, numa rampa que faz um ângulo de 25º, conforme figura abaixo, um operário exerce uma força de 209 N paralela a rampa. Se o caixote se desloca de 1,5 m. (despreze o atrito entre o caixote e a rampa)

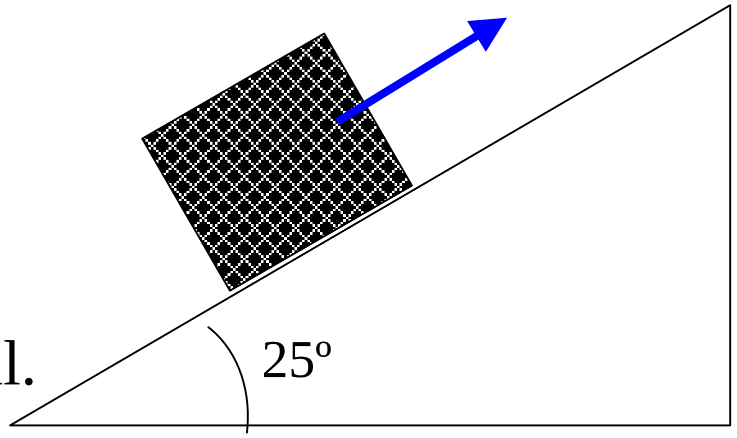
Determine:

a) O trabalho realizado pelo operário.

b) O trabalho realizado pelo peso do caixote durante este deslocamento?

c) O trabalho executado pela força normal.

d) O trabalho total executado sobre o caixote?



Teorema Trabalho - Energia Cinética

O trabalho da força resultante é dado por: $$\mathbf{W_{Fres} = \sum F\Delta x}$$

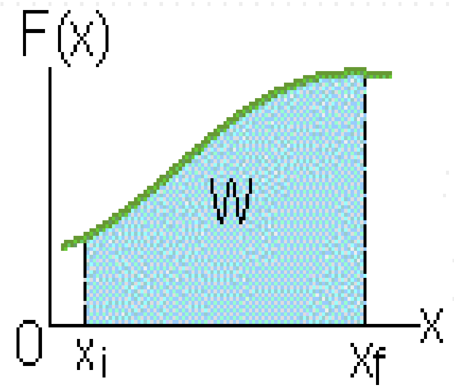
$$\boxed{\sum \mathbf{F\Delta x = W_{Fres} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta K}}$$

O trabalho realizado pela resultante das forças F_R para deslocar um corpo de um ponto A a um ponto B, é a diferença de energia cinética do corpo nos pontos B e A.

$$E_k = F \times s = m \times a \times s = m \times a \times \frac{at^2}{2} = \frac{m(at)^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

Demonstração do teorema Trabalho – Energia cinética

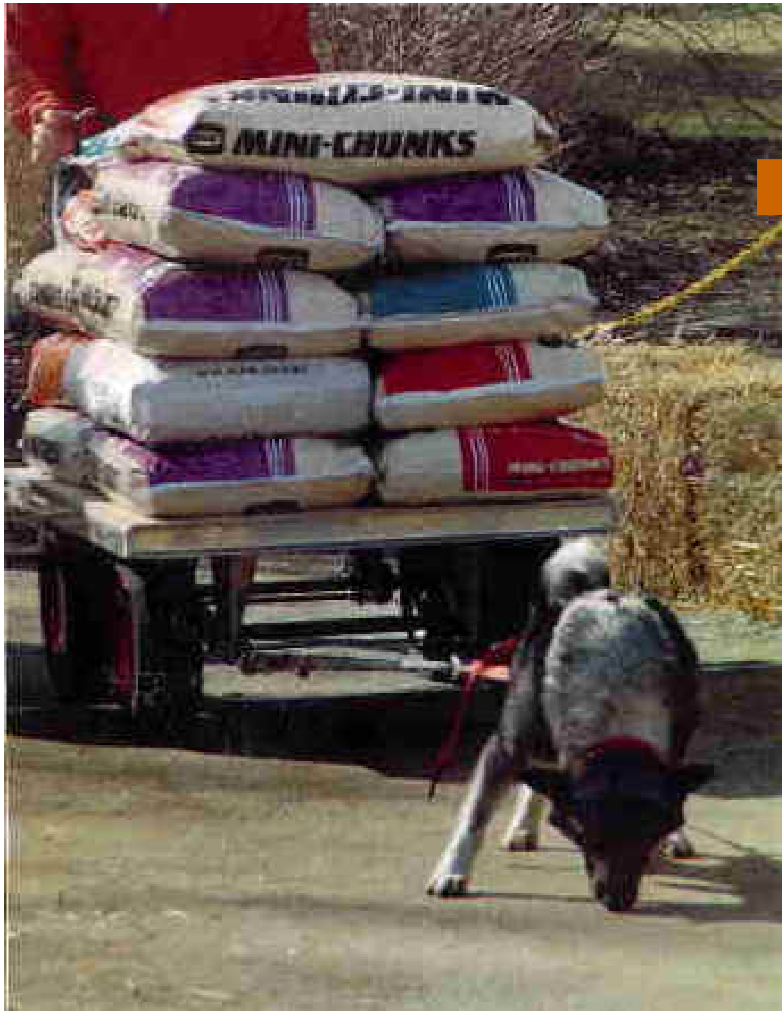
Em 1 dimensão: $F \equiv F(x)$



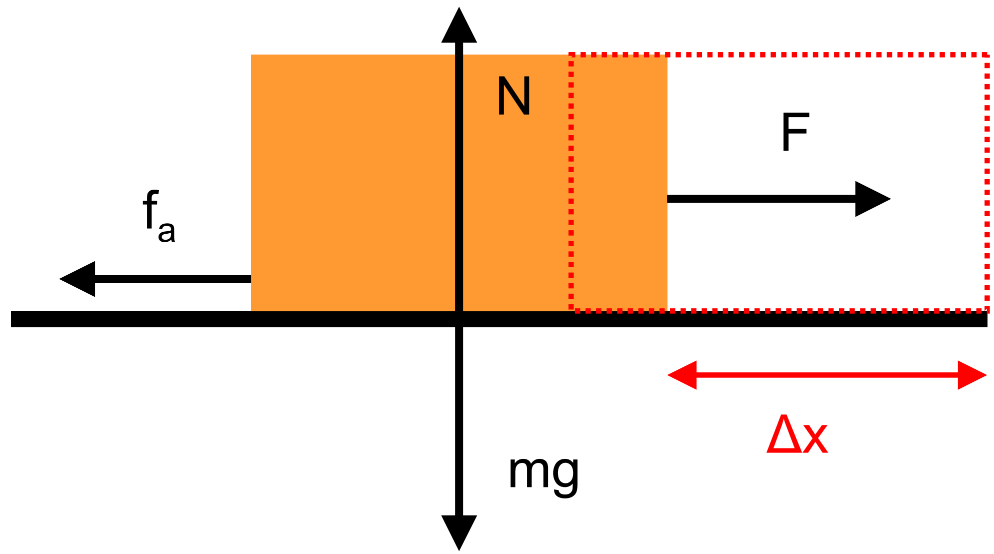
$$W = \int_{x_i}^{x_f} \overbrace{F(x)}^{ma}dx = m\int_{x_i}^{x_f} \frac{dv}{dt}dx =$$

$$\mathbf{W_{FR} = m\int_{v_i}^{v_f} v\,dv = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \Delta K}$$

Teorema Trabalho - Energia Cinética



Modelo para resolver o problema:



Trabalho realizado pelo cão:

$$W_c = F\Delta x$$

Trabalho realizado pela força de atrito:

$$W_{atr} = f_{atr}\Delta x = -\mu_c mg\Delta x$$

...continuação do mesmo exemplo:

Se o carrinho se desloca com velocidade constante:

$$\Delta K = 0$$

Consistente com o fato de que o trabalho total ser nulo:

$$W_c + W_{atr} = 0$$

A força resultante é nula:

$$\sum F = F + f_a = 0$$

Teorema Trabalho - Energia Cinética

Exemplo para o trabalho da força peso F = -mg

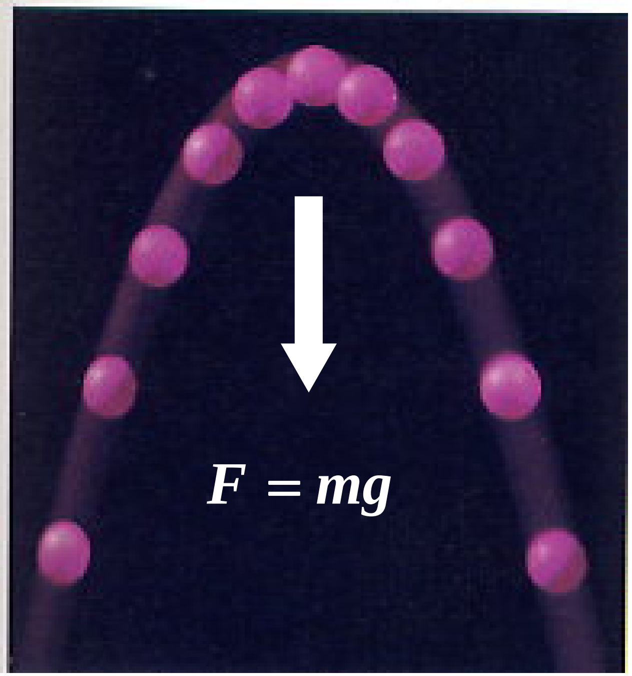
$$\Delta K = K_f - K_i = W_{res} = \sum F\Delta y$$

$\Delta y > 0$

$F < 0$

$W < 0$

$\Delta K < 0$



$\Delta y < 0$

$F < 0$

$W > 0$

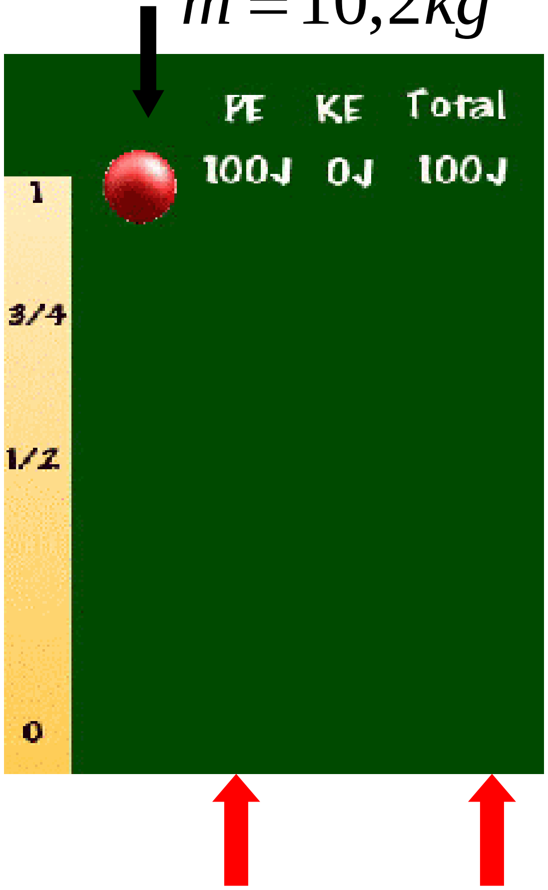
$\Delta K > 0$

$$\Delta \mathrm{K} = \mathrm{K_f} - \mathrm{K_i} = \mathrm{W_{res}} = \sum \mathrm{F}\Delta \mathrm{x}$$

Teorema Trabalho - Energia Cinética

Força peso: cálculo do trabalho de uma força constante em 1 dimensão

$$m = 10{,}2kg$$



$$W = \int_{y_i}^{y_f} m(-g)dy = -mg(y_f - y_i)$$

$$W = 100J$$

Trabalho em 2 ou 3 dimensões
(exemplo para uma força constante)

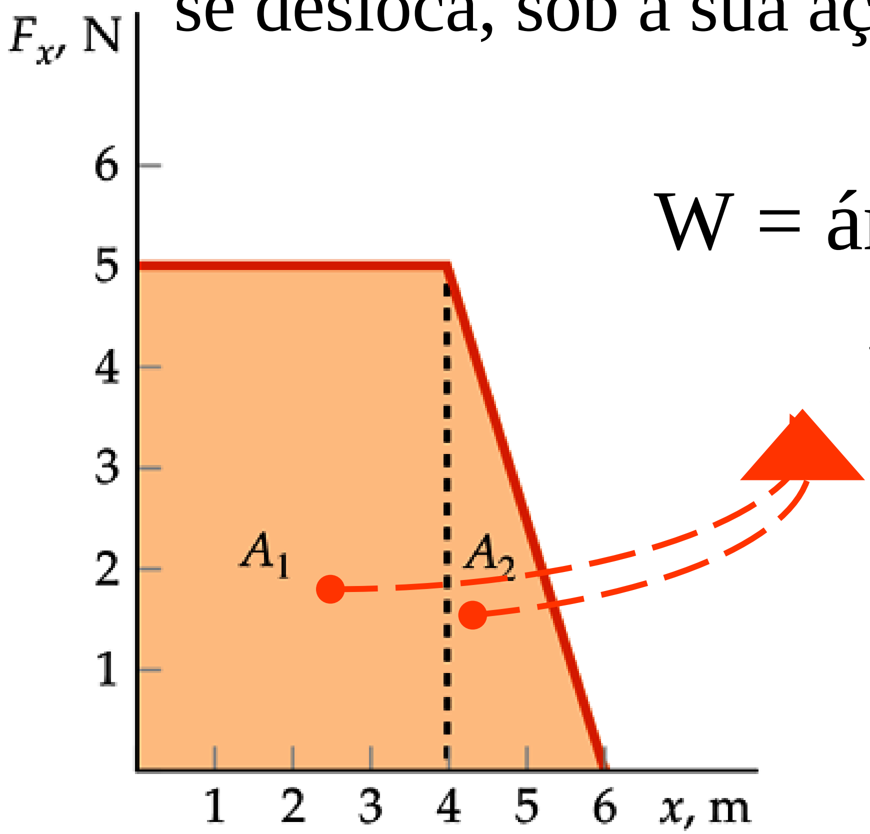
Trabalho devido a uma força F em mais de uma dimensão:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \Delta r \cos\theta$$

Trabalho Realizado por força variável

Exemplo:

Uma força F_x varia co x conforme a figura abaixo. Calcular o trabalho feito pela força sobre o corpo que se desloca, sob a sua ação, de x = 0 até x = 6 m.

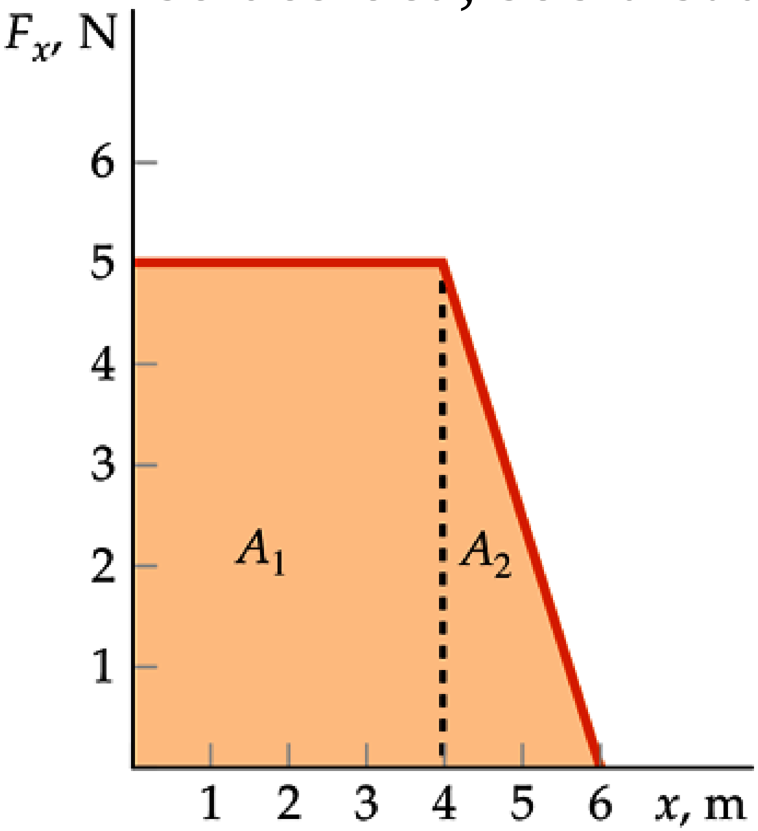


W = área no gráfico

F(x) *versus* x

Trabalho Realizado por força variável

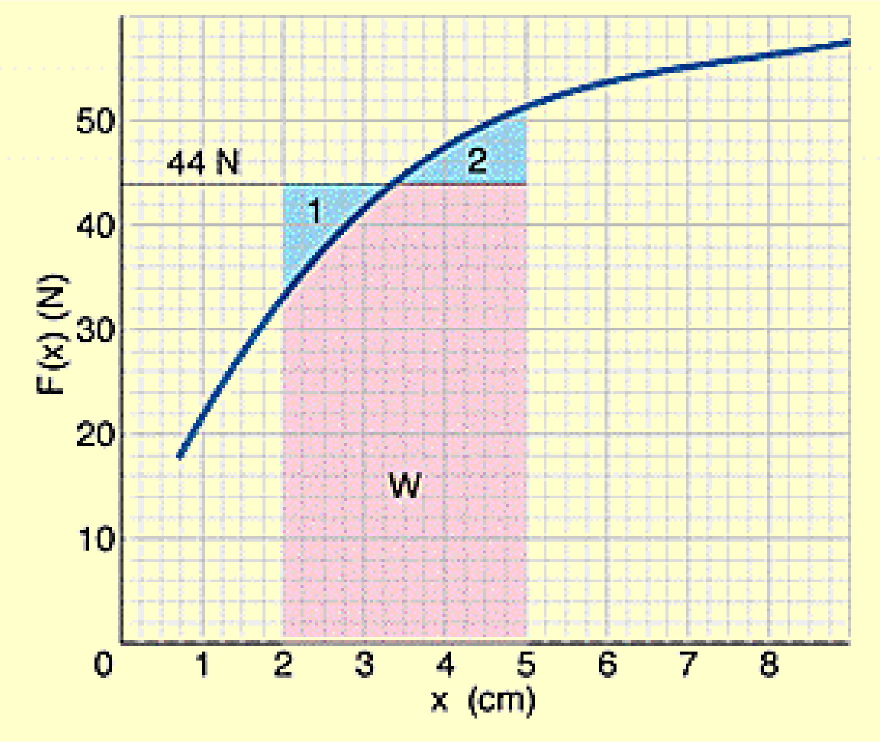
Uma força F_x varia co x conforme a figura abaixo. Calcular o trabalho feito pela força sobre o corpo que se desloca, sob a sua ação, de x = 0 até x = 6 m.



$$W = A = A_1 + A_2$$
$$= (5\,\mathrm{N})(4\,\mathrm{m}) + \frac{1}{2}(5\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{m})$$
$$= 20\,\mathrm{J} + 5\,\mathrm{J} = 25\,\mathrm{J}$$

Trabalho Realizado por força variável

Em 1 dimensão F(x):

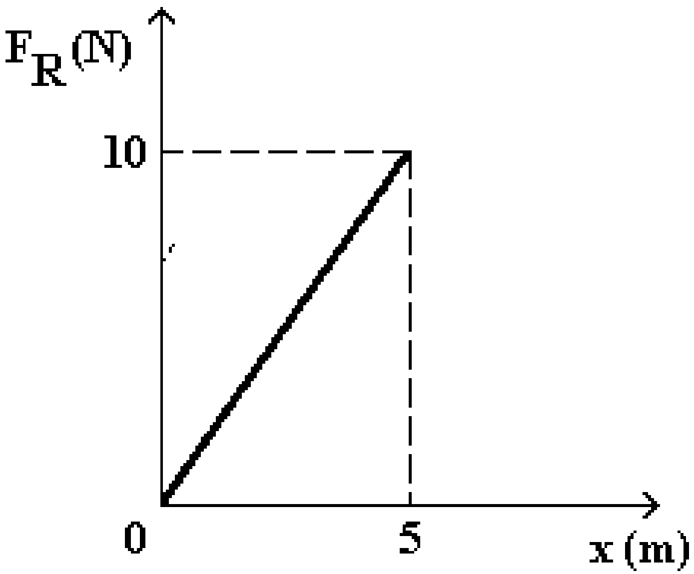


$$W = \text{height} \times \text{base} = (44\ \text{N})(5.0\ \text{cm} - 2.0\ \text{cm})$$
$$= 132\ \text{N}\cdot\text{cm} \approx 1.3\ \text{N}\cdot\text{m} = 1.3\ \text{J}.$$

Trabalho Realizado por força variável

Exemplo:

O gráfico a seguir é uma reta e representa a variação da força resultante que atua em um corpo de 1,2 kg em função do deslocamento. Sabe-se que a velocidade na posição x = 2 m é de 4 m/s. Qual é a velocidade do corpo na posição x = 4 m?

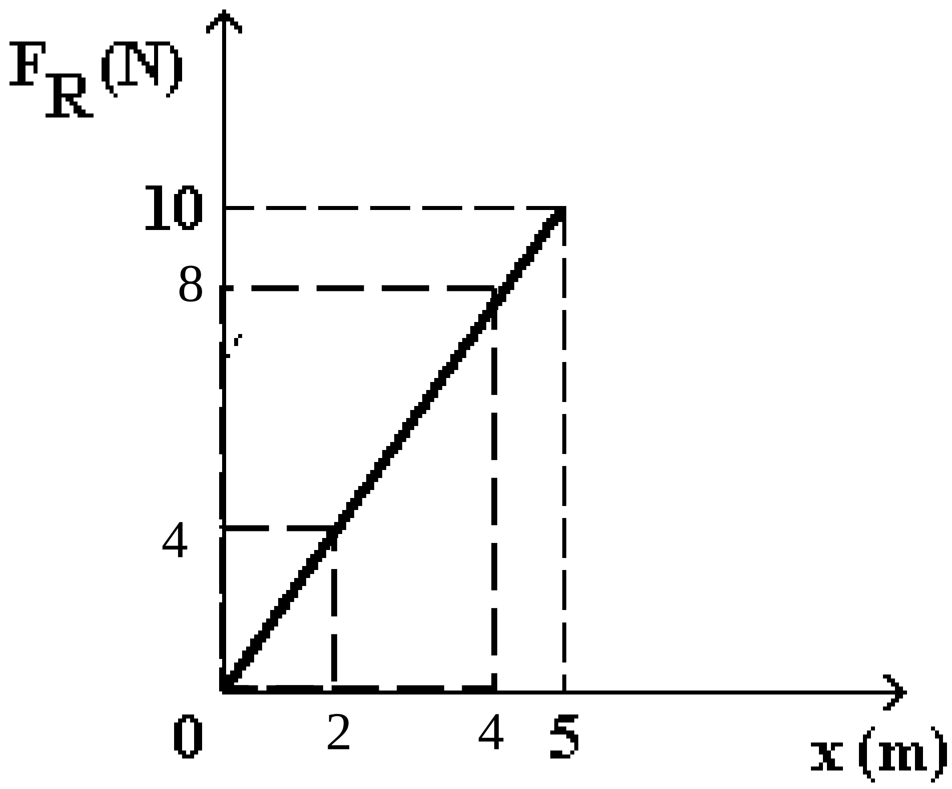


Trabalho Realizado por força variável

Exemplo:

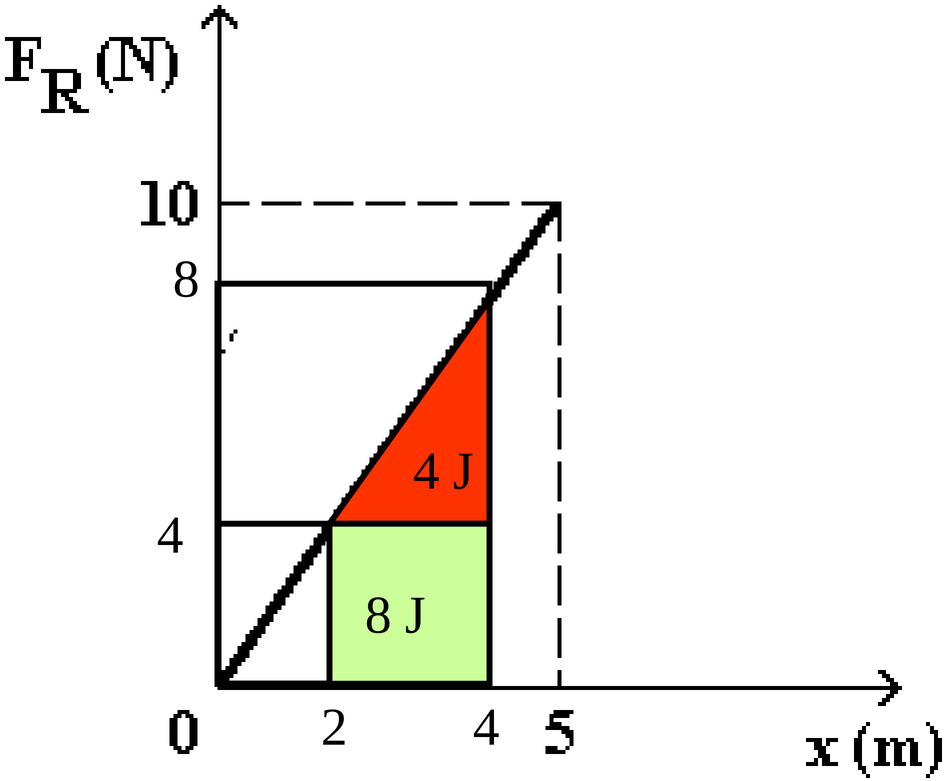
m =1,2 kg , x = 2 m v = 4 m/s. Qual é a velocidade do corpo em x = 4 m?

F = k Δx



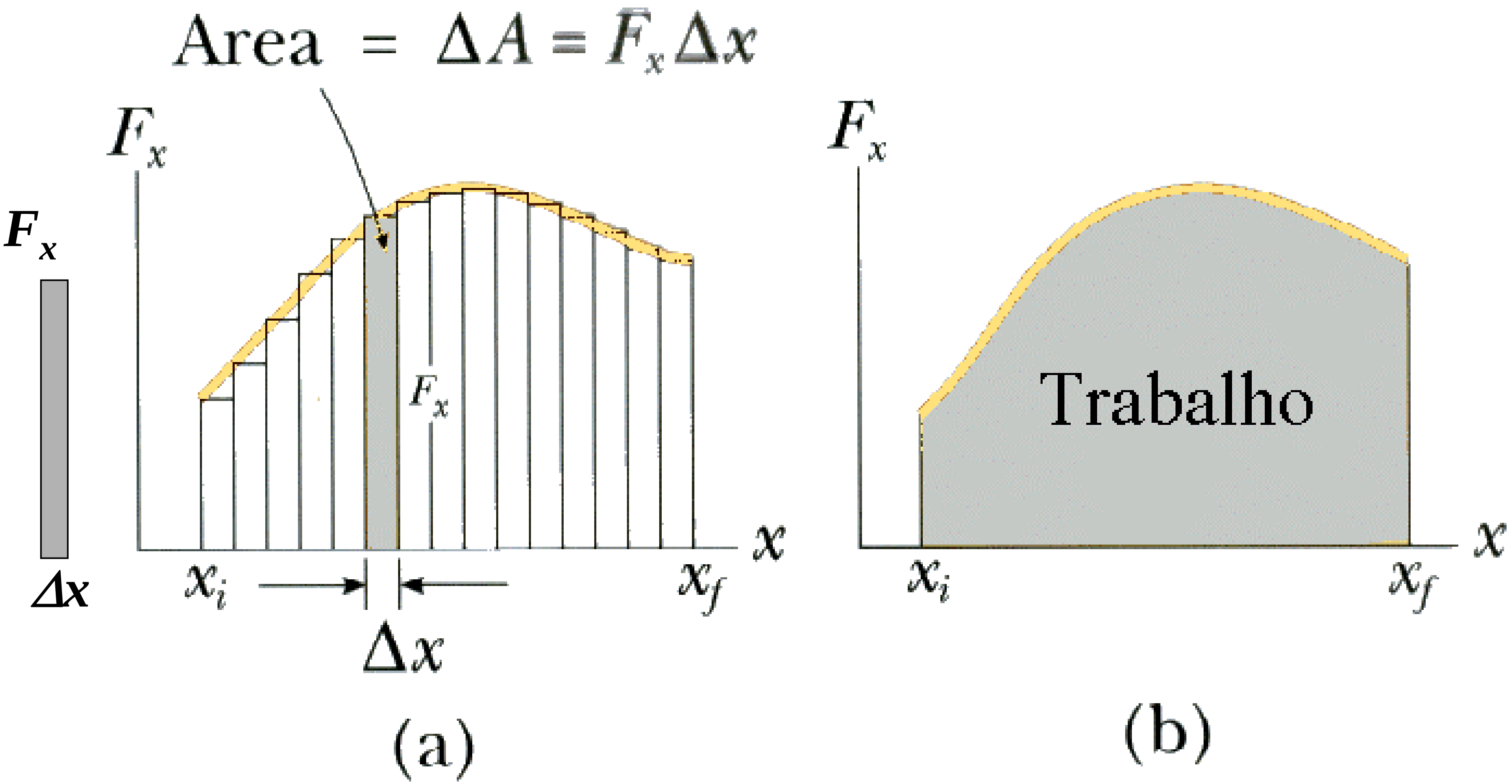
Trabalho Realizado por força variável

m =1,2 kg , x = 2 m v = 4 m/s. Qual é a velocidade do corpo em x = 4 m?



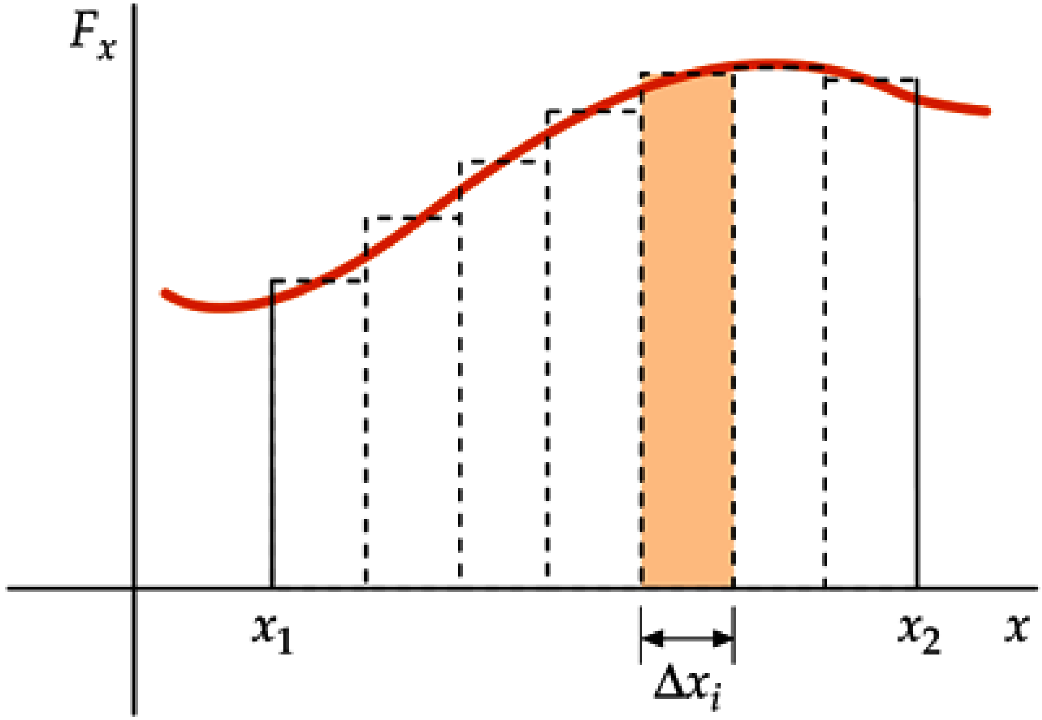
W = 12 J =Δ K

Trabalho Realizado por força variável



A área sob a curva entre os pontos xi e xf, será dada pela soma das áreas dos retângulos.

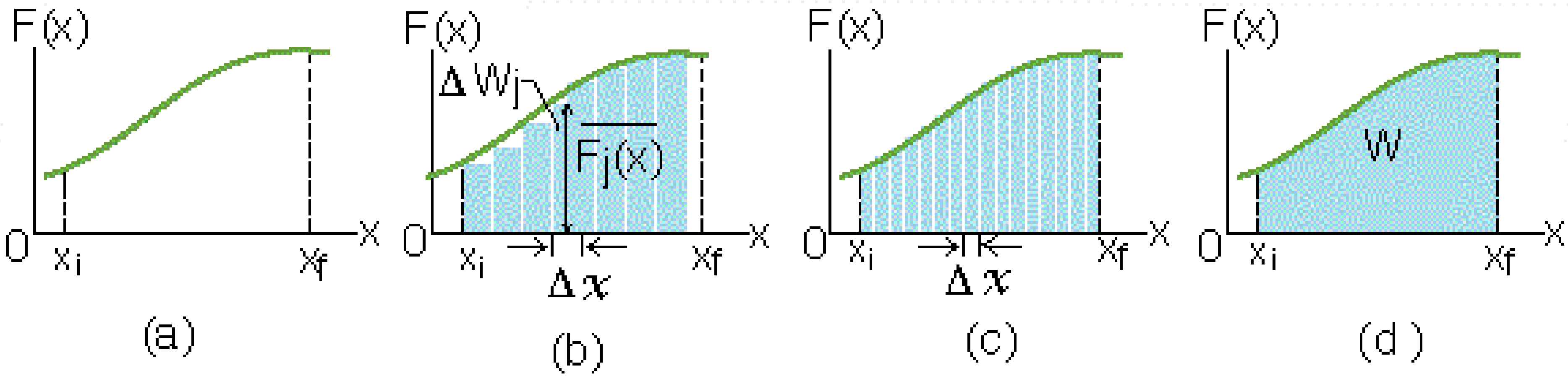
Trabalho Realizado por força variável



A área sob a curva entre os pontos x1 e x2, será dada pela soma das áreas dos retângulos.

$$\sum F \Delta x$$

Conceito de integral

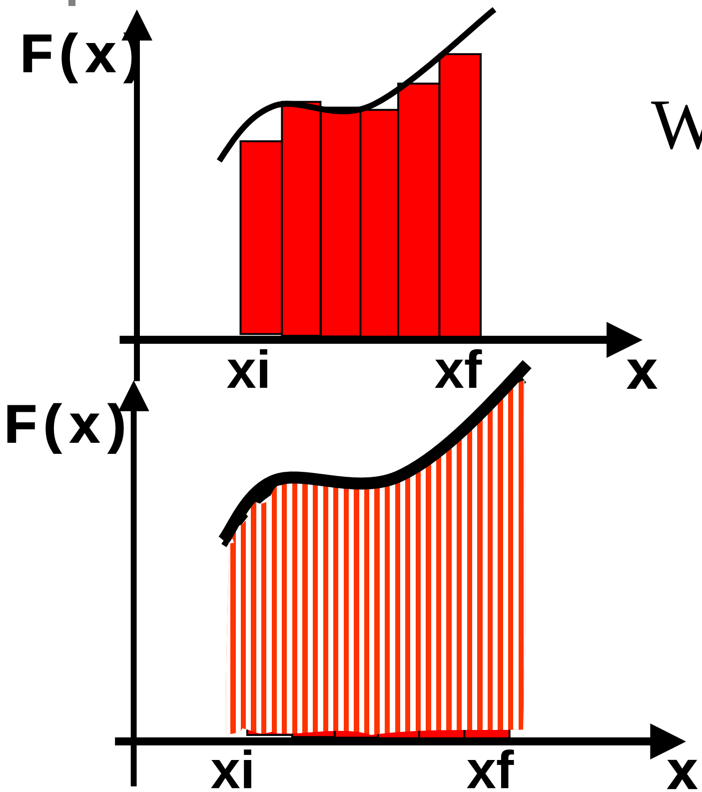


$$W = \lim_{\Delta x} \sum F \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx$$

A área sob a curva entre os pontos xi e xf, será dada pela soma das áreas dos retângulos. Quando o número de retângulos é muito grande, a soma passa à integral, no limite que o intervalo Δx, se torna um infinitésimo.

A área sob a curva, é a integral da função nos limites considerados.

Trabalho Realizado por força variável



$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum F \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

$$\boxed{W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx}$$

A área sob a curva entre os pontos xi e xf, será dada pela soma das áreas dos retângulos. Quando o número de retângulos é muito grande, a soma passa à integral, no limite que o intervalo Δx, se torna um infinitésimo. A área sob a curva, é a integral da função nos limites considerados.

Trabalho Realizado por força variável

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum F \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

$$\int_{x_i}^{x_f} x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$$

Trabalho Realizado por força variável

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

n = 4

$$\int x^4 \, dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{x^5}{5}$$

$$\int (x^4 + x^2) dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}$$

Integral indefinida

Limites da integração

$$\int_{x_i}^{x_f} x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_{0,5}^{3} x \, dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \left|\frac{x^2}{2}\right|_{0,5}^{3} = \left(\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{0,5^2}{2}\right) = 4,5 - 0,125 = 4,375$$

Substituir o limite superior menos limite inferior

Limite Final

$$\int_{1}^{3} x^4 \, dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} = \left|\frac{x^5}{5}\right|_{1}^{3} = \left(\frac{3^5}{5}\right) - \left(\frac{1^5}{5}\right) = 243 - 0,2 = 242,8$$

Limite inicial

Integral definida

Trabalho Realizado por força variável

Exemplo:

A única força atuante em um corpo de 2,0 kg enquanto ele se move ao longo do sentido positivo do eixo x é dada por

$$\mathbf{F}(x) = (2x + 3x^2)\ \mathrm{N}\,,$$

onde x está em metros e **F**(x) em newtons a velocidade do corpo em x = 2,0 m é de 6 m/s.

a) qual o trabalho realizado por esta força durante o deslocamento entre x = 2 m e x = 4 m ?

b) qual a velocidade do corpo em x = 4,0 m ?

Limites da integração

m = 2,0 kg , **F(*x*) = (2x + 3x²) N** , em x = 2,0 m é de 6 m/s.

a) qual o trabalho realizado por esta força durante o deslocamento entre x = 2 m e x = 4 m ?

$$\int (2x + 3x^2)dx = \frac{2x^{1+1}}{1+1} + \frac{3x^{2+1}}{2+1} = \frac{2x^2}{2} + \frac{3x^3}{3}$$

$$\int_2^4 (2x + 3x^2)\, dx = = \left| 2\frac{x^2}{2} \right|_2^4 + \left| 3\frac{x^3}{3} \right|_2^4 = 68 \text{ J}$$

Substituir o limite superior “4” menos limite inferior “2”.

Trabalho Realizado por força variável

b) qual a velocidade do corpo em x = 4,0 m ?

F(*x*) = (2x + 3x^2) N , x = 2,0 m x = 4 m

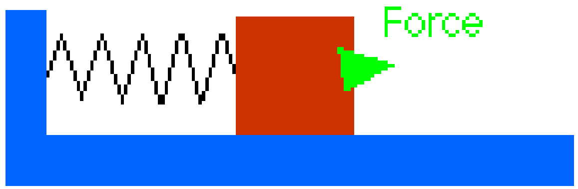
$$\mathbf{W = 68\ J}$$

$$\mathbf{W = \frac{1}{2} m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \Delta K}$$

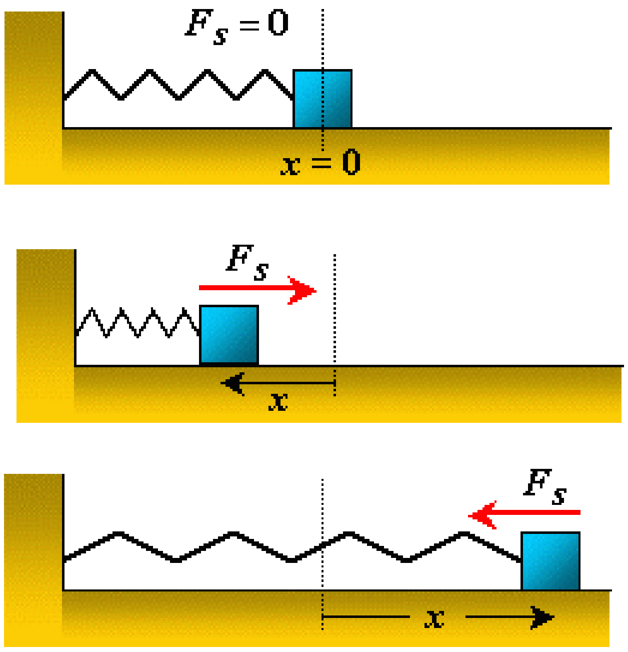
W = Kf – Ki = >>>>>>>>>> v = 10,2 m/s

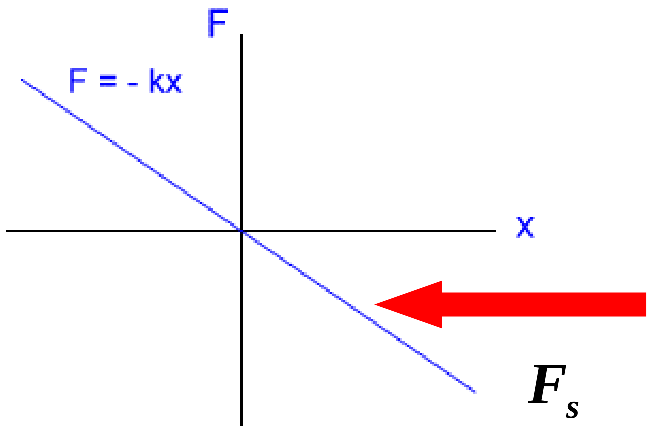
Forças que variam com a posição:

Exemplo a ser estudado: trabalho da força elástica: $$F = -kx$$



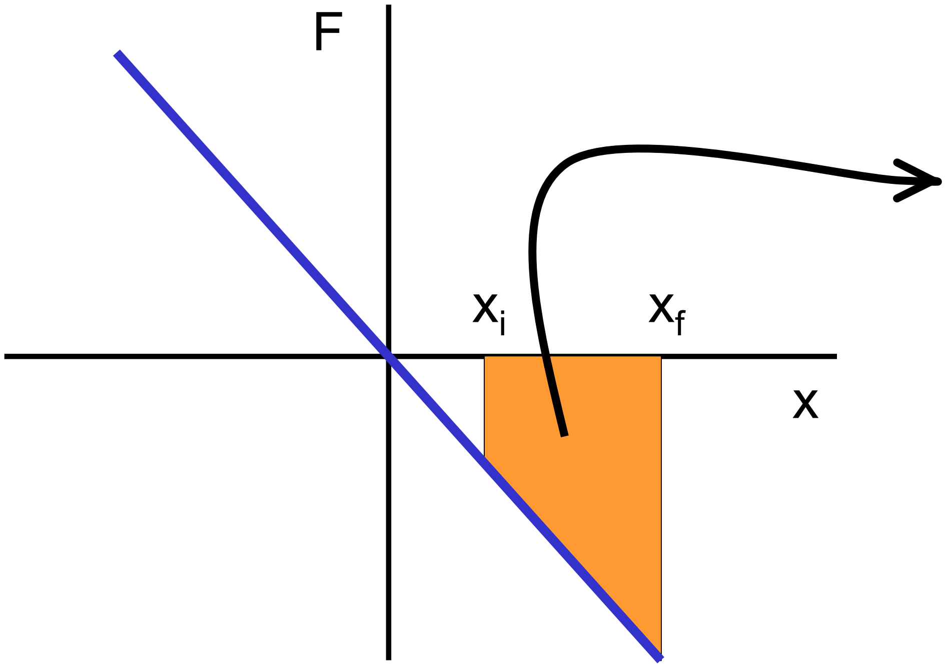
Força para esticar uma mola





Força restauradora da mola

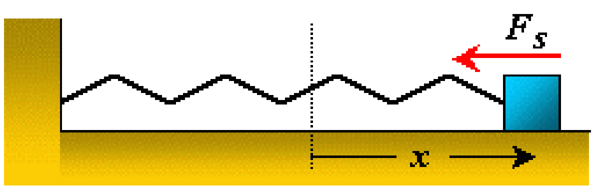
Trabalho realizado pela força da mola



$$W_{mola} = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx =$$

$$-k\int_{x_i}^{x_f} x dx =$$

$$-\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

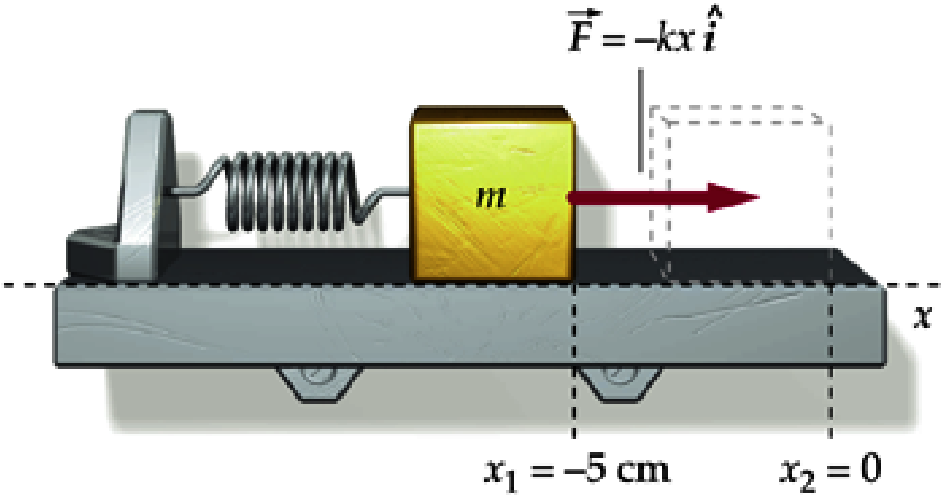


Se $|x_i| < |x_f| \Rightarrow W < 0$

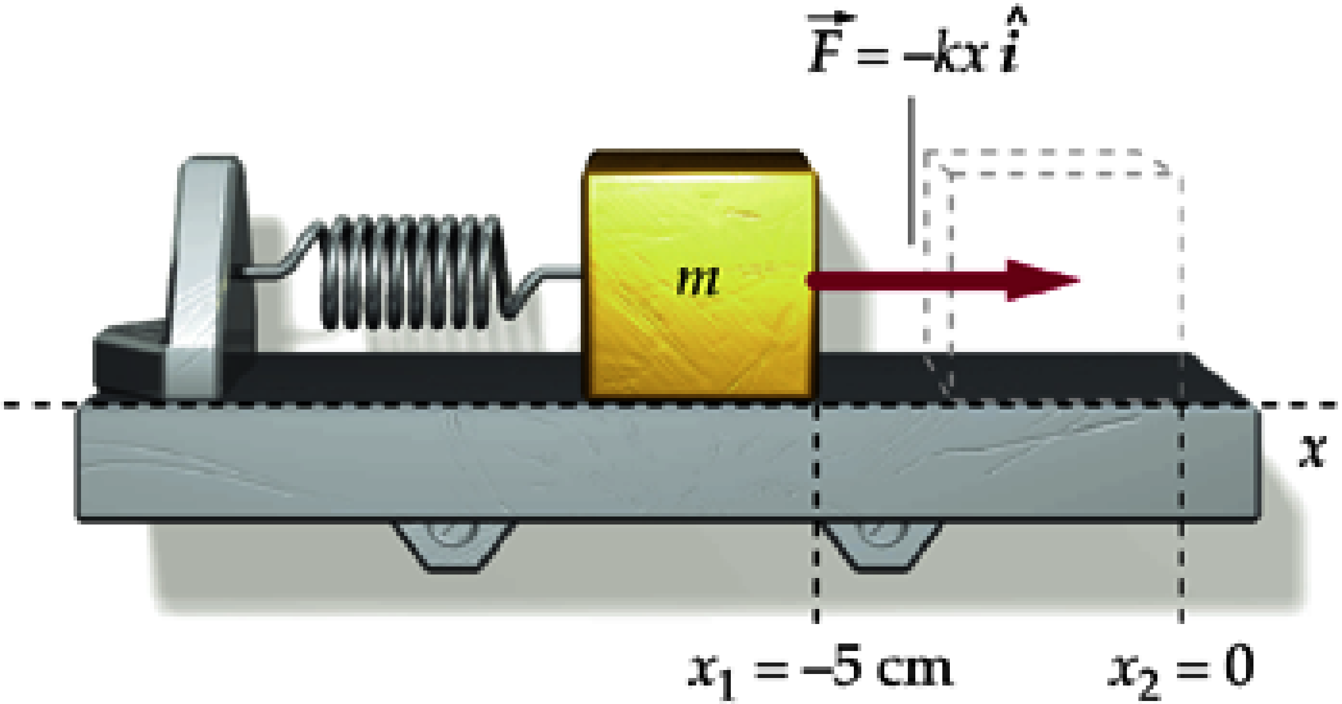
O trabalho sobre a mola pelo **agente externo** é o valor obtido acima com sinal trocado

Exemplo:

Um corpo de 4 kg está pousado numa mesa sem atrito e preso a uma mola horizontal que exerce uma força dada pela lei de Hooke $F = - kx$, com $k = 400$ N/m e x em metros medidos a partir da posição de equilíbrio da mola. Originalmente, a mola está comprimida com o corpo em $x_1 = - 5$ cm. Calcular o trabalho feito pela mola sobe o corpo no deslocamento $x_1 = - 5$ cm até a posição de equilíbrio $x_2 = 0$ e a velocidade do corpo em $x_2 = 0$.

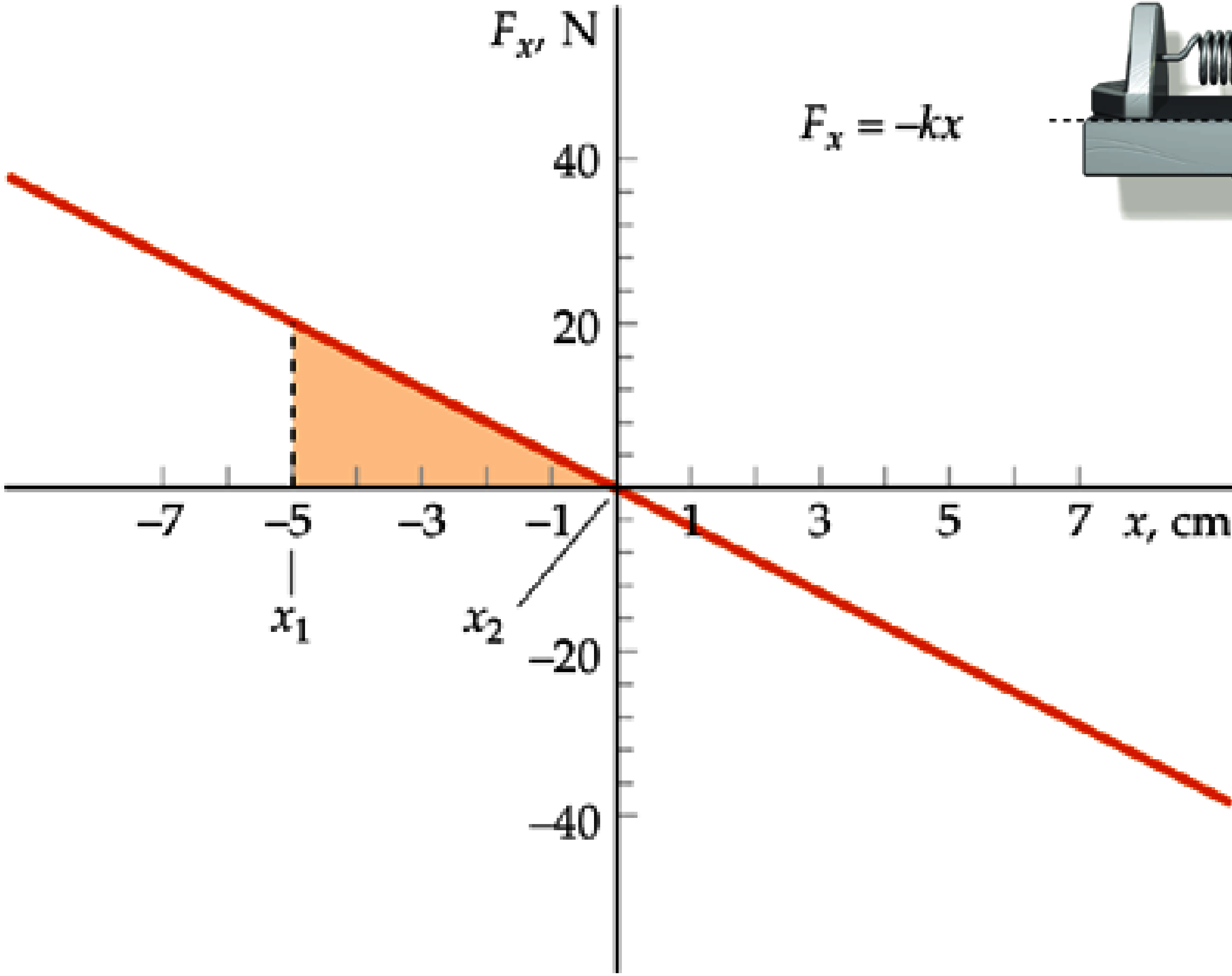


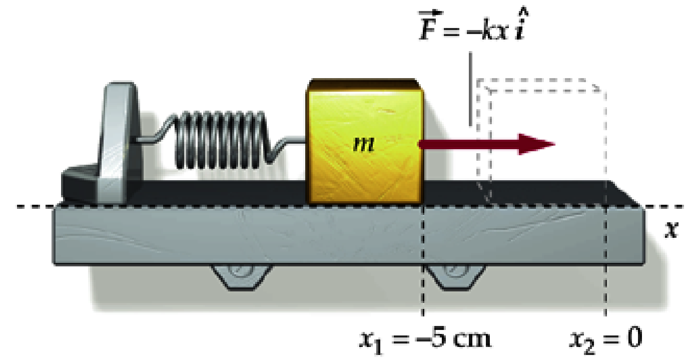
m = 4 kg , k = 400 N/m x_1 = - 5 cm. x_1 = - 5 cm até a posição de equilíbrio x_2 = 0 e a velocidade em x_2 =0.



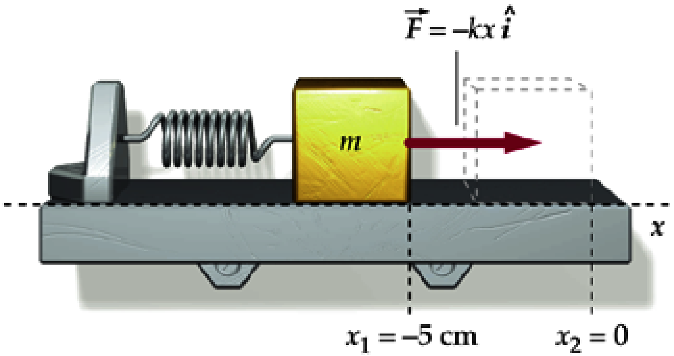
$$\mathbf{W_{mola}} = \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{F(x)dx} = -\mathbf{k}\int_{x_i}^{x_f} \mathbf{xdx} = -\frac{1}{2}\mathbf{k}(\mathbf{x_f^2} - \mathbf{x_i^2})$$

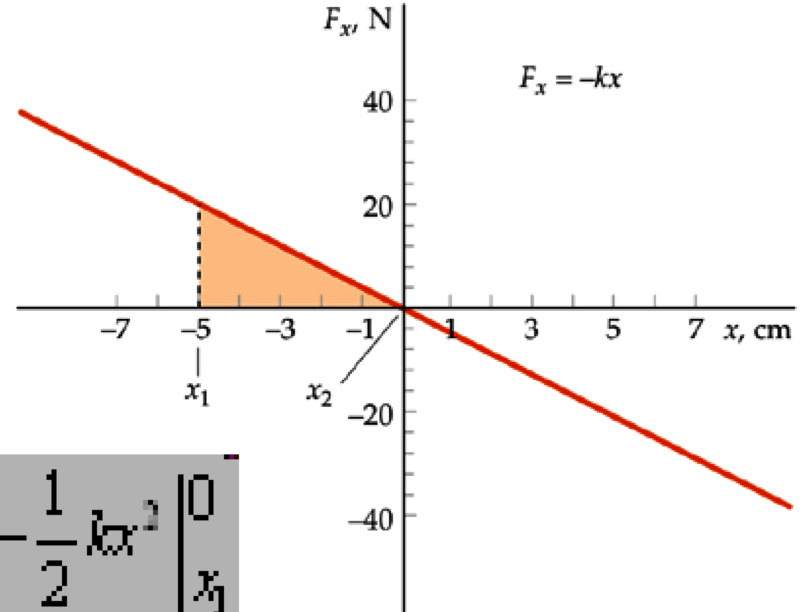
m = 4 kg , k = 400 N/m x_1 = - 5 cm. x_1 = - 5 cm até a posição de equilíbrio x_2 = 0 e a velocidade em x_2 =0.





m = 4 kg , k = 400 N/m x_1 = - 5 cm. x_1 = - 5 cm até a posição de equilíbrio x_2 = 0 e a velocidade em x_2 =0.





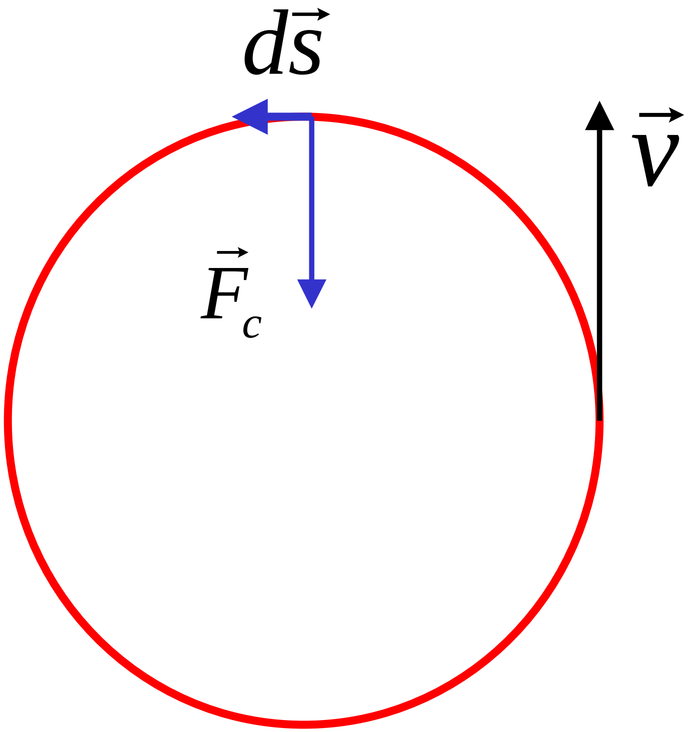
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{0} -kx\,dx = -k\int_{x_1}^{0} x\,dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_1}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(400\ \mathrm{N/m})(0.05\ \mathrm{m})^2 = 0.500\ \mathrm{J}$$

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.500\ \mathrm{J})}{4\,\mathrm{kg}}} = 0.50\ \mathrm{m/s}$$

Ausência de trabalho no movimento circular uniforme



$$dW = \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = 0$$

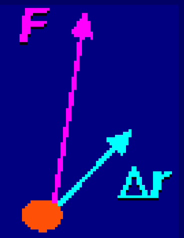
Pelo teorema trabalho – energia cinética:

$$|\vec{v}| = cte.$$

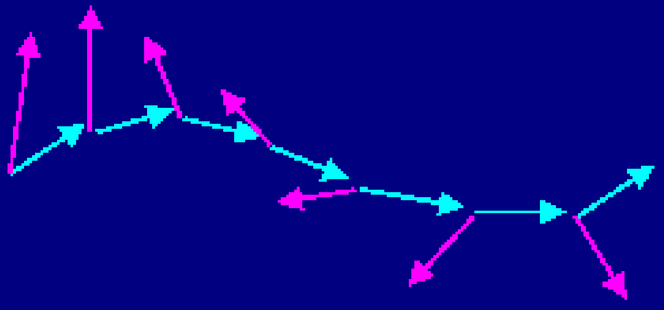
$$W = \Delta K = 0$$

Forças que variam tanto de módulo quanto de direção

Trabalho dW_f de uma força F agindo ao longo de um deslocamento infinitesimal



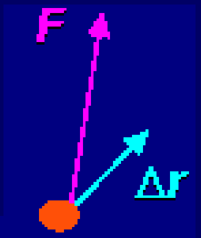
$$dW = F \cdot \Delta r$$



$$W_{TOT} = \int F \cdot \Delta r$$

Forças que variam tanto de módulo quanto de direção

Trabalho dW_f de uma força F agindo ao longo de um deslocamento infinitesimal



$$dW = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}. \qquad (7\text{-}29)$$

The increment of work dW done on the particle by **F** during the displacement $d\mathbf{r}$ is, by Eq. 7-11,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz. \qquad (7\text{-}30)$$

The work W done by **F** while the particle moves from an initial position r_i with coordinates (x_i, y_i, z_i) to a final position r_f with coordinates (x_f, y_f, z_f) is then

$$\boxed{W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\,dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\,dz.} \qquad (7\text{-}31)$$

Exemplo: $\vec{F} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$

$$\vec{r}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = 3\hat{i} + 0\hat{j}$$

SOLUTION: From Eq. 7-31 we have

$$W = \int_2^3 3x\,dx + \int_3^0 4\,dy = 3\int_2^3 x\,dx + 4\int_3^0 dy.$$

Using the list of integrals in Appendix E, we obtain

$$\begin{aligned} W &= 3\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_2^3 + 4\left[y\right]_3^0 \\ &= \tfrac{3}{2}[3^2 - 2^2] + 4[0 - 3] \\ &= -4.5\text{ J} \approx -5\text{ J}. \qquad \text{(Answer)} \end{aligned}$$

V aumenta ou diminui? $W < 0 \Rightarrow \Delta K < 0$ V diminui